2 – Дәріс

Тақырыбы: **Рационал өрнектерді интегралдау. Рационал функция және оны жай бөлшектер қосындысына жіктеу. Рационал бөлшектерді интегралдау. Иррационал және тригонометриялық функцияларды интегралдау.**

Рационал функция және оны жай бөлшектер қосындысына жіктеу. Екі алгебралық көпмүшеліктердің қатынасы

$$f(x) = \frac{P_m(x)}{Q_n(x)}, \tag{1}$$

$$P_m(x) = b_0 + b_1 x + \ldots + b_m x^m,\ b_m \neq 0,\ m \geq 0$$

$$Q_m(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n,\ a_n \neq 0,\ n \geq 1,\ Q_n(x) \neq 0$$

рационал функция немесе рационал бөлшек деп аталады.

P_m және Q_n –нақты көпмүшеліктер және x –нақты айнымалы.

$$\frac{A}{(x-a)^k},\ \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k},\ k \in N \tag{2}$$

(мұндағы a, p, q, A, B –нақты сандар; $D = p^2 - 4q < 0$)
түріндегі бөлшектер жай бөлшектер деп аталады.

Егер $m \geq n$ болса, онда бөлу арқылы $f(x)$ функциясын оның бүтін бөлігі мен дұрыс бөлшек деп аталатын $\frac{P_{m_1}(x)}{Q_n(x)}$, $m_1 < n$ бөлшектің қосындысы түрінде жаза аламыз:

$$f(x) = R_{m-n}(x) + \frac{P_{m_1}(x)}{Q_n(x)},\ m_1 < n \tag{3}$$

Енді (1) бөлшекті дұрыс $(m < n)$ деп алып, оны жай (2) бөлшектердің қосындысына жіктеу мәселесін қарастырайық.

Теорема. $\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$, $m < n$ бөлшегінің бөлімі (4) теңдік түрінде жіктелінсін:

$$Q_n(x) = a_n(x-a)^k \ldots (x^2+px+q)^e,\ p^2 - 4q < 0 \tag{4}$$

Онда ол бөлшекті жалғыз түрде келесі қосындыға жіктеуге болады:

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = \frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \ldots + \frac{A_k}{(x-a)^k} + \\ + \frac{B_1 x + C_1}{x^2+px+q} + \frac{B_2 x + C_2}{(x^2+px+q)^2} + \ldots + \frac{B_e x + C_e}{(x^2+px+q)^e} \tag{5}$$

Мұндағы A_i, B_i, C_i –тұрақты сандар.

Бұл теореманы мысалдармен түсіндірейік.
Дұрыс бөлшектерді жай бөлшектер қосындысына жіктеу керек:

1) $\frac{x-3}{x^3-x}$; 2) $\frac{x^2+x-1}{x(x^2+1)^2}$.

1) бөлшектің бөлімін (4) түрде жазайық: $x^3 - x = x(x^2-1) = x(x-1)(x+1)$. Онда ол бөлшекке (2) жіктелуді келесі түрде жазуға болады:

$$\frac{x-3}{x^3-x} = \frac{x-3}{x(x-1)(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+1}.$$

Мұндағы A, B, C коэффициенттерін табу үшін бұл теңдіктің оң жағын бір бөлшекке келтіреміз

$$\frac{x-3}{x^3-x} = \frac{A(x-1)(x+1) + Bx(x+1) + Cx(x-1)}{x(x-1)(x+1)}.$$

Бұл теңдіктен келесі тепе-теңдікті жазуға болады:

$$x - 3 = A(x^2-1) + Bx(x+1) + Cx(x-1). \qquad (6)$$

немесе

$$0 \cdot x^2 + x - 3 = (A+B+C)x^2 + (B-C)x + B - A - C.$$

Бұдан үш белгісі бар үш теңдеулер жүйесін аламыз да, оны шешіп A, B, C коэффициенттерін табамыз. Бұл әдіс **анықталмаған коэффициенттер әдісі** деп аталынады.

Немесе A, B, C –табу үшін былай етуге болады. (6)–теңдік x–тің кез келген мәнінде дұрыс болатындықтан x–ке «ыңғайлы мәндер береміз. Мысалы, A–ны табу үшін x–ке екінші және үшінші қосылғыштар нөлге тең болатындай мән: $x = 0$ береміз.

Онда $-3 = A \cdot (-1)$, $A = 3$. B мен C–ларды да осылай табуға болады.

$$x = 1,\ -2 = 2B,\ B = -1;$$
$$x = -1,\ -4 = 2C,\ C = -2;$$

Бұл әдісті кейде **дербес мәндер әдісі** деп атайды.
Сонымен,

$$\frac{x-3}{x^3-x} = \frac{3}{x} - \frac{1}{x-1} - \frac{2}{x+1}.$$

2) Мұнда бөлшектің бөлімі (4) түрде көбейткіштерге жіктеліп тұр. Бөлшекті (5)–түрде жазайық:

$$\frac{x^2+x-1}{x(x^2+1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1} + \frac{Dx+E}{(x^2+1)^2}$$

Теңдіктің оң жағын бір бөлшекке келтіріп, содан соң екі бөлшектің алымдарын теңестірейік:

$$x^2 + x - 1 = A(x^2+1)^2 + (Bx+C)x + (Dx+E)\cdot x \cdot (x^2+1)$$

Мұнда $x = 0$ деп алсақ A–ны табамыз:

$$x = 0,\ -1 = A.$$

Қалған белгісіздерді табу үшін теңдіктің оң және сол бөліктеріндегі x–тің бірдей дәрежелерінің коэффициенттерін теңестіреміз:

$$A + B = 0,\ C = 0,\ 2A + B + D = 1,\ C + E = 1,\ A = -1.$$

Бұдан

$$A = -1,\ B = 1,\ C = 0,\ D = 2,\ E = 1$$

табамыз. Олай болса,

$$\frac{x^2+x-1}{x(x^2+1)^2} = -\frac{1}{x} + \frac{x}{x^2+1} + \frac{2x+1}{(x^2+1)^2}.$$

Тригонометриялық функцияларды интегралдау

$$\int R(\sin x, \cos x)dx \tag{1}$$

түріндегі интегралды табайық. Бұл интеграл

$$u = tg\frac{x}{2} \tag{2}$$

ауыстыруы арқылы әрқашанда рационал функцияның интегралына келеді. Расында да,

$$\sin x = \frac{2\sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}}{1} = \frac{2\sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}} = \frac{2tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}} = \frac{2u}{1+u^2}, \tag{3}$$

$$\cos x = \frac{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}{1} = \frac{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}} = \frac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1-tg^2\frac{x}{2}} = \frac{1-u^2}{1+u^2}, \tag{4}$$

$$u = tg\frac{x}{2} \Rightarrow x = 2arctgu, dx = 2\frac{du}{1+u^2} \tag{5}$$

болады, яғни $\sin x, \cos x, dx$ -рационал функциялар арқылы өрнектеледі.

Кейбір иррационал өрнектерді интегралдау

Рационал емес элементар функциялардың интегралдарын айнымалыны алмастыру арқылы рационал функцияның интегралына келтіруге болатын яғни, **интегралды рационалдауға** болатын жағдайларды қарастырайық.

$R(x,y)$ - аргументтері x пен y -тің рационал функциясы болсын, ол $R(x,y)$ -өрнегін алу үшін x пен y -ке тек арифметикалық амалдар қолданылады деген сөз.

I. Есептеу керек: $\int R\left(x, \sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)dx$, - мұндағы a,b,c,d -тұрақты сандар, m -натурал сан, $ad-bc\neq 0$. Интеграл астындағы функция сызықты бөлшек иррационалдық деп аталады

Бұл интеграл $t = \sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}}$ айнымалы ауыстыруы арқылы рационалданады. Шынында да,

$$t^m = \frac{ax+b}{cx+d} \Rightarrow x = \frac{b-dt^m}{ct^m-a};\ dx = \frac{mt^{m-1}(ad-bc)}{(ct^m-a)^2}dt$$

өрнектері рационал функциялар. Ал рационал функциялардың рационал функциясы – рационал функция.